

RİYAZİYYAT

ИССЛЕДОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ
СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ
ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА. III.

К.И.ХУДАВЕРДИЕВ, С.А.АГАЕВА

Бакинский Государственный Университет

Работа посвящена изучению вопросов существования и единственности классического решения одномерной смешанной задачи для полулинейных параболических уравнений четвёртого порядка. Введено понятие классического решения изучаемой смешанной задачи. После применения метода Фурье решение исходной задачи сведено к решению некоторой счётной системы нелинейных интегральных уравнений относительно неизвестных коэффициентов Фурье $u_n(t)$ ($n=1,2,\dots$) по системе $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ искомого решения $u(t,x)$. Далее, доказаны: теорема о единственности в целом, теорема существования в малом и теорема существования в целом классического решения рассматриваемой смешанной задачи.

Работа посвящена изучению вопросов существования и единственности классического решения следующей одномерной смешанной задачи:

$$\begin{cases} u_t(t,x) + u_{xxxx}(t,x) = F(t,x, u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x)) & (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \pi), & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(0,x) = \varphi(x) & (0 \leq x \leq \pi), & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t,0) = u(t,\pi) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,\pi) = 0 & (0 \leq t \leq T), & (3) \end{cases}$$

где $0 < T < +\infty$; F, φ – заданные функции, а $u(t,x)$ – искомая функция, причём под классическим решением задачи (1)-(3) понимаем функцию $u(t,x)$, непрерывную в замкнутой области $[0,T] \times [0,\pi]$ вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1), и удовлетворяющую всем условиям (1)-(3) в обычном смысле.

§1. Вспомогательные факты

С целью исследования классического решения задачи (1)-(3) приведём некоторые известные факты и установим ряд новых вспомогательных фактов.

1. Так как система $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в пространстве

$L_2(0, \pi)$, то очевидно, что каждое классическое решение $u(t, x)$ задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx, \quad (4)$$

где

$$u_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x) \sin nx \, dx \quad (n=1, 2, \dots; t \in [0, T]). \quad (5)$$

Тогда, после применения метода Фурье, нахождение функций $u_n(t)$ ($n=1, 2, \dots$) сводится к решению следующей счётной системы нелинейных интегральных уравнений:

$$u_n(t) = \varphi_n \cdot e^{-n^2 t} + \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^{\pi} \mathbf{F}(u(\tau, x)) \sin nx \cdot e^{-n^2(t-\tau)} \, dx d\tau \quad (n=1, 2, \dots; t \in [0, T]), \quad (6)$$

где

$$\varphi_n \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx \, dx \quad (n=1, 2, \dots), \quad (7)$$

$$\mathbf{F}(u(t, x)) \equiv F(t, x, u(t, x), u_x(t, x), u_{xx}(t, x)). \quad (8)$$

2. Исходя из определения классического решения задачи (1)-(3) легко доказывается следующая

Лемма. Если $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx$ – любое классическое решение задачи (1)-(3), то функции $u_n(t)$ ($n=1, 2, \dots$) удовлетворяют системе (6).

3. Обозначим через $B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}$ совокупность всех функций $u(t, x)$ вида

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx,$$

рассматриваемых на $[0, T] \times [0, \pi]$, для которых все функции $u_n(t) \in C^{(l)}([0, T])$ и

$$J_T(u) \equiv \sum_{i=0}^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(i)}(t)|)^{\beta_i} \right\}^{1/\beta_i} < +\infty,$$

где $l \geq 0$ – целое число, $\alpha_i \geq 0$ ($i = \overline{0, l}$), $1 \leq \beta_i \leq 2$ ($i = \overline{0, l}$). Норму в этом множестве определим так: $\|u\| = J_T(u)$. Известно (см. [1]), что все эти пространства банаховы.

4. В данной работе, с целью изучения вопроса существования классического решения задачи (1)-(3), систему (6), при предположениях

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(u(t, x)), \frac{\partial}{\partial x} \{\mathbf{F}(u(t, x))\} &\in C([0, T] \times [0, \pi]), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{\mathbf{F}(u(t, x))\} &\in C([0, T]; L_2(0, \pi)) \end{aligned} \quad (9)$$

и

$$\mathbf{F}(u(t, x))\Big|_{x=0} = \mathbf{F}(u(t, x))\Big|_{x=\pi} = 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad (10)$$

после интегрирования по частям по x два раза в правой части (6), преобразуем к виду:

$$\begin{aligned} u_n(t) = \varphi_n \cdot e^{-n^4 t} - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \int_0^t \int_0^\pi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{\mathbf{F}(u(\tau, x))\} \sin nx \cdot e^{-n^4(t-\tau)} dx d\tau \\ (n = 1, 2, \dots; t \in [0, T]). \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда, в свою очередь, имеем

$$\begin{aligned} u'_n(t) = -n^4 \cdot \varphi_n \cdot e^{-n^4 t} + \frac{2}{\pi} \cdot n^2 \cdot \int_0^t \int_0^\pi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{\mathbf{F}(u(\tau, x))\} \sin nx \cdot e^{-n^4(t-\tau)} dx d\tau - \\ - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \int_0^\pi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{\mathbf{F}(u(t, x))\} \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots; t \in [0, T]). \end{aligned} \quad (11')$$

5. Пусть для натурального числа k :

$$\varphi(x) \in C^{(k-1)}([0, \pi]), \quad \varphi^{(k)}(x) \in L_2(0, \pi), \quad \varphi^{(2s)}(0) = \varphi^{(2s)}(\pi) = 0 \quad \left(s = 0, \left[\frac{k-1}{2} \right] \right). \quad (12)$$

Тогда, с помощью интегрирования по частям, пользуясь неравенством Бесселя (для нечётного k) и равенством Парсеваля (для чётного k), легко получить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^k \cdot \varphi_n)^2 \leq \frac{2}{\pi} \cdot \|\varphi^{(k)}(x)\|_{L_2(0, \pi)}^2, \quad (13)$$

где числа φ_n ($n = 1, 2, \dots$) определены соотношением (7); кроме того, очевидно, что оценка (13) верна и при $k = 0$, если $\varphi(x) \in L_2(0, \pi)$.

6. Очевидно, что если $u(t, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in B_{2,T}^k$ ($k \geq 1$ – целое), то $\forall t \in [0, T]$:

$$\|u\|_{B_{1,t}^{k-1}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \cdot \max_{0 \leq \tau \leq t} |u_n(\tau)| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (n^k \cdot \max_{0 \leq \tau \leq t} |u_n(\tau)|)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \|u\|_{B_{2,t}^k}. \quad (14)$$

§2. Исследование единственности классического решения задачи (1)–(3)

С помощью неравенства Беллмана доказана следующая теорема о

единственности в целом классического решения задачи (1)-(3).

Теорема 1. Пусть

1. $F(t, x, u_1, u_2, u_3) \in C([0, T] \times [0, \pi] \times (-\infty, \infty)^3)$.
2. $\forall R > 0$ в $[0, T] \times [0, \pi] \times [-R, R]^3$

$$|F(t, x, u_1, u_2, u_3) - F(t, x, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)| \leq C_R \cdot \sum_{i=1}^3 |u_i - \tilde{u}_i|,$$

где $C_R > 0$ – постоянная.

Тогда задача (1)-(3) не может иметь более одного классического решения.

§3. Исследование существования в малом классического решения задачи (1)-(3)

В этом параграфе доказывается следующая теорема существования в малом (т.е. справедливая при достаточно малых значениях T) классического решения задачи (1)-(3).

Теорема 2. Пусть

1. $\varphi(x) \in C^{(4)}([0, \pi])$, $\varphi^{(5)}(x) \in L_2(0, \pi)$ и
 $\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = \varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(\pi) = 0$.
2. $F(t, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3), F_{\xi_i}(t, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) (i=0, \overline{3}), F_{\xi_i \xi_j}(t, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) (i, j=0, \overline{3}) \in C([0, T] \times [0, \pi] \times (-\infty, \infty)^3)$.
3. $F(t, 0, 0, u_2, 0) = F(t, \pi, 0, u_2, 0) \quad \forall t \in [0, T], u_2 \in (-\infty, \infty)$.

Тогда существует в малом классического решение задачи (1)-(3).

Доказательство. Так как из условий данной теоремы вытекает выполнение всех условий теоремы 2 из работы [7], то, по теореме 2 из работы [7], при условиях данной теоремы существует в малом решение почти всюду

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \in B_{2,2,T}^{4,0} \quad (15)$$

задачи (1)-(3), причём функции $u_n(t)$ ($n=1, 2, \dots$) удовлетворяют системе (6). Покажем, что эта же функция $u(t, x) \in B_{2,2,T}^{4,0}$ является (при тех же достаточно малых значениях T) классическим решением задачи (1)-(3).

Из соотношения (15), как показано в работе [7] (см. соотношения (31), (33) и (40)) следует, что

$$u(t, x), u_x(t, x), u_{xx}(t, x), u_{xxx}(t, x) \in C([0, T] \times [0, \pi]); \quad (16)$$

$$u_{xxxx}(t, x), u_t(t, x) \in C([0, T]; L_2(0, \pi)). \quad (17)$$

Кроме того, функция $u(t, x) \in B_{2,2,T}^{4,0}$, как решение почти всюду за-

дачи (1)-(3), обладает свойствами

$$u(t,0) = u(t,\pi) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,\pi) = 0 \quad (0 \leq t \leq T). \quad (18)$$

Тогда, в силу условий 2 и 3 данной теоремы и соотношений (16)-(18), очевидно, что функция $\mathbf{F}(u(t,x))$, определённая соотношением (8), удовлетворяет условиям (9) и (10). Следовательно, пользуясь соотношениями (9) и (10), систему (6), после интегрирования по частям по x два раза в её правой части, можно преобразовать к виду (11), т.е. функции $u_n(t)$ ($n=1,2,\dots$) удовлетворяют системе (11).

Далее, пользуясь условием 2 данной теоремы и соотношениями (16), получаем, что $\forall t \in [0, T]$ и $x \in [0, \pi]$:

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ \mathbf{F}(u(t,x)) \} \right| \leq C_1 + C_2 \cdot |u_{xxxx}(t,x)|, \quad (19)$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ – некоторые постоянные, а функция $\mathbf{F}(u(t,x))$ определена соотношением (8).

Следовательно, в силу первого из соотношений (17), $\forall t \in [0, T]$ имеем:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ \mathbf{F}(u(t,x)) \} \right\|_{L(0,\pi)} &\leq C_1 \cdot \pi + C_2 \cdot \int_0^\pi |u_{xxxx}(t,x)| dx \leq \\ &\leq C_1 \cdot \pi + C_2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \left\{ \int_0^\pi u_{xxxx}^2(t,x) dx \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq C_1 \cdot \pi + C_2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \left\| \| u_{xxxx}(t,x) \|_{L_2(0,\pi)} \right\|_{C([0,T])} \equiv C_3 < +\infty. \end{aligned} \quad (20)$$

Кроме того, очевидно, что $\forall n$ ($n=1,2,\dots$) и $t \in [0, T]$:

$$\int_0^t e^{-n^4(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{n^4} \cdot e^{-n^4(t-\tau)} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{n^4} \cdot (1 - e^{-n^4 t}) \leq \frac{1}{n^4}. \quad (21)$$

Тогда, пользуясь соотношениями (20) и (21), из (11) получаем, что $\forall n$ ($n=1,2,\dots$) и $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} |u_n(t)| &\leq |\varphi_n| + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \int_0^t \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ \mathbf{F}(u(\tau,x)) \} \right\|_{L(0,\pi)} \cdot e^{-n^4(t-\tau)} d\tau \leq \\ &\leq |\varphi_n| + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot C_3 \cdot \int_0^t e^{-n^4(t-\tau)} d\tau \leq |\varphi_n| + \frac{2}{\pi} \cdot C_3 \cdot \frac{1}{n^6}, \end{aligned}$$

$$n^5 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_n(t)| \leq n^5 \cdot |\varphi_n| + \frac{2}{\pi} \cdot C_3 \cdot \frac{1}{n};$$

следовательно

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^5 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_n(t)|^2 \right) &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^5 \cdot \varphi_n)^2 + 2 \left(\frac{2}{\pi} \cdot C_3 \right)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^5 \cdot \varphi_n)^2 + \frac{8}{\pi^2} \cdot C_3^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^5 \cdot \varphi_n)^2 + \frac{4}{3} \cdot C_3^2, \end{aligned} \quad (22)$$

причём сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (n^5 \cdot \varphi_n)^2$ следует, в силу условия 1 данной теоремы, из оценки (13) для $k = 5$.

Из (22) следует, что

$$u(t, x) \in B_{2,T}^5. \quad (23)$$

А из (23), в силу оценок (14) для $k = 5$, следует, что

$$\|u(t, x)\|_{B_{1,T}^4} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \|u(t, x)\|_{B_{2,T}^5}, \quad (24)$$

следовательно

$$\|u\|_{B_{1,T}^4} = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_n(t)| < +\infty. \quad (25)$$

Из (25) следует, что

$$u(t, x), u_x(t, x), u_{xx}(t, x), u_{xxx}(t, x), u_{xxxx}(t, x) \in C([0, T] \times [0, \pi]). \quad (26)$$

С другой стороны, из соотношения (23), в силу оценок

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} u_{xxxx}^2(t, x) dx &= \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (n^5 \cdot u_n(t))^2 \leq \\ &\leq \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^5 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_n(t)| \right)^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \|u\|_{B_{2,T}^5}^2 \quad (0 \leq t \leq T) \end{aligned} \quad (27)$$

и структуры пространства $B_{2,T}^5$, дополнительно следует, что

$$u_{xxxx}(t, x) \in C([0, T]; L_2(0, \pi)). \quad (28)$$

Далее, в силу условия 2 данной теоремы, из свойств (26) функции $u(t, x)$ следует, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ \mathbf{F}(u(t, x)) \} \in C([0, T] \times [0, \pi]). \quad (29)$$

Тогда из (11') следует, что

$$u'_n(t) \in C([0, T]) \quad \forall n (n = 1, 2, \dots). \quad (30)$$

Примем обозначение:

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ \mathbf{F}(u(t, x)) \} \right\|_{C([0, T] \times [0, \pi])} \equiv C_4. \quad (31)$$

Теперь, пользуясь обозначением (31) и оценкой (21), из (11') полу-

чаем, что $\forall n (n=1,2,\dots)$ и $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
|u'_n(t)| &\leq n^4 \cdot |\varphi_n| + \frac{2}{\pi} \cdot n^2 \cdot \int_0^t \int_0^\pi \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ \mathbf{F}(u(\tau, x)) \} \right| \cdot e^{-n^4(t-\tau)} dx d\tau + \\
&+ \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \int_0^\pi \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ \mathbf{F}(u(\tau, x)) \} \right| dx \leq \\
&\leq n^4 \cdot |\varphi_n| + \frac{2}{\pi} \cdot n^2 \cdot C_4 \cdot \pi \cdot \int_0^t e^{-n^4(t-\tau)} d\tau + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot C_4 \cdot \pi \leq \\
&\leq n^4 \cdot |\varphi_n| + 2n^2 \cdot C_4 \cdot \frac{1}{n^4} + 2C_4 \cdot \frac{1}{n^2} = n^4 \cdot |\varphi_n| + 4C_4 \cdot \frac{1}{n^2}, \\
n \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u'_n(t)| &\leq n^5 \cdot |\varphi_n| + 4C_4 \cdot \frac{1}{n};
\end{aligned}$$

следовательно

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u'_n(t)| \right)^2 &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^5 \cdot \varphi_n)^2 + 2 \cdot (4C_4)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^5 \cdot \varphi_n)^2 + \frac{16}{3} \pi^2 \cdot C_4^2 < +\infty. \quad (32)
\end{aligned}$$

Из (32) следует, что

$$\|u_t\|_{B_{2,T}^1}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u'_n(t)| \right)^2 < +\infty,$$

т.е.

$$u_t(t, x) \in B_{2,T}^1. \quad (33)$$

Теперь, из соотношения (33), в силу оценок (14) для $k=1$, следует, что

$$\|u_t(t, x)\|_{B_{1,T}^2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \|u_t(t, x)\|_{B_{2,T}^1}, \quad (34)$$

следовательно

$$\|u_t(t, x)\|_{B_{1,T}^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u'_n(t)| < +\infty. \quad (35)$$

Из (35) следует, что

$$u_t(t, x) \in C([0, T] \times [0, \pi]). \quad (36)$$

С другой стороны, из соотношения (33), в силу оценок

$$\int_0^\pi u_{tx}^2(t, x) dx = \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot u'_n(t))^2 \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(n \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u'_n(t)| \right)^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \|u_t\|_{B_{2,T}^1}^2 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (37)$$

и структуры пространства $B_{2,T}^1$, дополнительно следует, что

$$u_{tx}(t, x) \in C([0, T]; L_2(0, \pi)). \quad (38)$$

Таким образом, из соотношений (26) и (36) следует, что функция $u(t, x)$ непрерывна в замкнутой области $[0, T] \times [0, \pi]$ вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1). Кроме того, функция $u(t, x)$, в частности, как решение почти всюду задачи (1)-(3), удовлетворяет всем условиям (2) и (3) в обычном смысле.

Далее, из систем (6), пользуясь обозначениями

$$\mathbf{F}_n(u, t) \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{F}(u(t, x)) \sin nx \, dx \quad (n=1, 2, \dots; t \in [0, T]), \quad (39)$$

получаем, что при любом фиксированном p ($p=1, 2, \dots$) $\forall t \in [0, T]$ и $x \in [0, \pi]$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^p u'_n(t) \sin nx + \sum_{n=1}^p n^4 u_n(t) \sin nx &= \sum_{n=1}^p [u'_n(t) + n^4 u_n(t)] \sin nx = \\ &= \sum_{n=1}^p \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{F}(u(t, x)) \sin nx \, dx \cdot \sin nx = \sum_{n=1}^p \mathbf{F}_n(u, t) \sin nx. \end{aligned} \quad (40)$$

В силу свойств (9) и (10) функции $\mathbf{F}(u(t, x))$, очевидно, что $\forall n$ ($n=1, 2, \dots$) и $t \in [0, T]$:

$$\mathbf{F}_n(u, t) \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{F}(u(t, x)) \sin nx \, dx = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \int_0^{\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ \mathbf{F}(u(t, x)) \} \sin nx \, dx. \quad (41)$$

Из (41), пользуясь соотношениями (29) и (31), получаем, что $\forall n$ ($n=1, 2, \dots$) и $t \in [0, T]$:

$$|\mathbf{F}_n(u, t)| \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \int_0^{\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ \mathbf{F}(u(t, x)) \} \right| dx \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot C_4 \cdot \pi = 2C_4 \cdot \frac{1}{n^2},$$

следовательно

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{F}_n(u, t)| &\leq 2C_4 \cdot \frac{1}{n^2}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{F}_n(u, t)| &\leq 2C_4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2C_4 \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{3} \pi^2 \cdot C_4 < +\infty. \end{aligned} \quad (42)$$

Из (42) следует, что $\forall t \in [0, T]$ и $x \in [0, \pi]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_n(u, t) \sin nx = \mathbf{F}(u(t, x)). \quad (43)$$

Тогда, пользуясь соотношениями (35), (25) и (43), из (40), переходя к пределу при $p \rightarrow \infty$, получаем, что $\forall t \in [0, T]$ и $x \in [0, \pi]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \sin nx + \sum_{n=1}^{\infty} n^4 u_n(t) \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_n(u, t) \sin nx,$$

т.е.

$$u_t(t, x) + u_{xxxx}(t, x) = \mathbf{F}(u(t, x)). \quad (44)$$

А это означает, что функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1) всюду в $[0, T] \times [0, \pi]$.

Таким образом, функция $u(t, x)$ является классическим решением задачи (1)-(3). Теорема доказана.

Замечание 1. Так как из условия 2 теоремы 2 следует выполнение всех условий теоремы 1, то при условиях теоремы 2 классическое решение задачи (1)-(3) не только существует в малом, но и оно единственное в целом.

Замечание 2. В процессе доказательства теоремы 2 мы показали, что решение почти всюду $u(t, x) \in B_{2,2,T}^{4,0}$ задачи (1)-(3), существование в малом которого установлено теоремой 2 из работы [7], является и классическим решением задачи (1)-(3), т.е. усиливая условия теоремы 2 работы [7], а именно, заменяя условия теоремы 2 работы [7] условиями теоремы 2 данной работы, мы решение почти всюду $u(t, x) \in B_{2,2,T}^{4,0}$ задачи (1)-(3) превратили в классическое решение $u(t, x) \in B_{2,2,T}^{5,1}$ (см. соотношения (23) и (33)) задачи (1)-(3).

Замечание 3. Как видно из соотношений (28) и (38), классическое решение $u(t, x) \in B_{2,2,T}^{5,1}$ задачи (1)-(3), найденное в процессе доказательства теоремы 2, обладает дополнительными (по сравнению с определением классического решения задачи (1)-(3)) свойствами (28) и (38). Кроме того, в силу соотношения $B_{2,2,T}^{5,1} \subset B_{1,T}^4$ и структуры пространства $B_{1,T}^4$, очевидно, что

$$u_{xxx}(t, 0) = u_{xxx}(t, \pi) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (45)$$

т.е. функция $u(t, x)$ обладает ещё дополнительными свойствами (45).

Замечание 4. Как видно из процесса доказательства теоремы 2, если функция $u(t, x) \in B_{2,2,T}^{4,0}$ было решением почти всюду в целом задачи (1)-(3), то, при условиях теоремы 2 было бы $u(t, x) \in B_{2,2,T}^{5,1}$ (см. соотношения (23) и (33)) и функция $u(t, x)$ являлась бы классическим решением

задачи (1)-(3).

§4. Исследование существования в целом классического решения задачи (1)-(3)

Сначала, с целью полноты изложения, приведём следующие три теоремы, тщательно доказанные в работе [5] и анонсированные в работе [7].

Теорема 3. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид:

$$F(t, x, u, u_x, u_{xx}) = f_0(t, x, u, u_x, u_{xx}) + f_1(x, u) + (f_2(x, u_x))_x, \quad (46)$$

где

а) $f_0(t, x, u_1, u_2, u_3) \in C([0, T] \times [0, \pi] \times (-\infty, \infty)^3)$ и в $[0, T] \times [0, \pi] \times (-\infty, \infty)^3$

$$|f_0(t, x, u_1, u_2, u_3)| \leq C_1 \cdot (1 + |u_1| + |u_2| + |u_3|), \quad C_1 = \text{const} > 0; \quad (47)$$

б) $f_1(x, u) \in C([0, \pi] \times (-\infty, \infty))$ и $\forall x \in [0, \pi], u \in (-\infty, \infty)$

$$\int_0^u f_1(x, \xi) d\xi \equiv g_1(x, u) \leq C_2 + \delta_1 \cdot u^2, \quad C_2 = \text{const} > 0, \quad \delta_1 \geq 0, \quad \delta_1 \cdot \frac{\pi^4}{3} < \frac{1}{2}; \quad (48)$$

в) $f_2(x, v) \in C^{(1)}([0, \pi] \times (-\infty, \infty))$ и $\forall x \in [0, \pi], v \in (-\infty, \infty)$

$$-\int_0^v f_2(x, \xi) d\xi \equiv g_2(x, v) \leq C_3 + \delta_2 \cdot v^2, \quad C_3 = \text{const} > 0,$$

$$\delta_2 \geq 0, \quad \delta_1 \cdot \frac{\pi^4}{3} + \delta_2 \cdot \pi^2 < \frac{1}{2}. \quad (49)$$

Тогда для всевозможных решений почти всюду $u(t, x)$ задачи (1)-(3) справедливы априорные оценки:

$$\int_0^T \int_0^\pi u_t^2(t, x) dx dt \leq C_0; \quad \int_0^\pi u_{xx}^2(t, x) dx \leq C_0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (50)$$

Теорема 4. Пусть

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot |\varphi_n| < +\infty$ где числа $\varphi_n (n=1, 2, \dots)$ определены соотношением (7).
2. Выполнены все условия теоремы 3.

Тогда для всевозможных решений почти всюду $u(t, x)$ задачи (1)-

(3) справедлива априорная оценка:

$$\|u(t, x)\|_{B_{1,T}^2} \leq C_0. \quad (51)$$

Теорема 5. Пусть

1. $\varphi(x) \in C^{(3)}([0, \pi]), \varphi^{(4)}(x) \in L_2(0, \pi)$ и $\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0$.
2. $F(t, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3), F_{\xi_i}(t, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) (i=0, \overline{3}) \in C([0, T] \times [0, \pi] \times (-\infty, \infty)^3)$.

3. $F(t, 0, 0, \xi_2, 0) = F(t, \pi, 0, \xi_2, 0) = 0 \quad \forall t \in [0, T], \xi_2 \in (-\infty, \infty)$.

4. Выполнены все условия теоремы 3.

Тогда задача (1)-(3) имеет единственное решение почти всюду $u(t, x) \in B_{2,2,T}^{4,0}$.

Отметим, что определение решения почти всюду задачи (1)-(3) дано в началах работ [5] и [7]. Кроме того, так как каждое классическое решение задачи (1)-(3) является и её решением почти всюду, то утверждения теорем 3 и 4 остаются в силе и для классических решений задачи (1)-(3).

Теперь, пользуясь теоремами 3-5, доказывается следующая теорема о существовании в целом классического решения задачи (1)-(3).

Теорема 6. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 2.
2. Выполнены все условия теоремы 3.

Тогда задача (1)-(3) имеет единственное классическое решение.

Доказательство. Так как из условий данной теоремы вытекает выполнение всех условий теоремы 5, то при условиях данной теоремы задача (1)-(3) имеет единственное решение почти всюду $u(t, x) \in B_{2,2,T}^{4,0}$. Далее, как объяснено в замечании 4, $u(t, x) \in B_{2,2,T}^{5,1}$ и функция $u(t, x)$ является классическим решением задачи (1)-(3). А единственность классического решения задачи (1)-(3) следует из замечания 1. Теорема доказана.

Замечание 5. В заключение отметим, что данная работа является продолжением работ [2]-[7], в которых изучены вопросы существования и единственности обобщённого и почти всюду решений задачи (1)-(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Худавердиев К.И. К теории многомерных смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений. – Дисс...докт. физ.-мат. наук – Баку, 1973г., Азербайджанский Государственный Университет, 319с.
2. Агаева С.А. Исследование обобщённого решения одномерной смешанной задачи для полулинейных параболических уравнений четвертого порядка. I. – Бакинский Государственный Университет, Баку, 2005г., 35 стр. (рукопись депонирована в АзНИИНТИ, Баку, 27.12.2005, №2785 –Аз.).
3. Агаева С.А. Исследование обобщённого решения одномерной смешанной задачи для полулинейных параболических уравнений четвертого порядка. –Тезисы научной конференции, посвященной 75-летию члена корреспондента НАНА, д.ф.м.н., профессора Я.Дж.Мамедова, Баку, 22 февраля 2006г., с.13-14.
4. Худавердиев К.И., Агаева С.А. Исследование обобщённого решения одномерной смешанной задачи для полулинейных параболических уравнений четвертого порядка. I. –Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2006г., №1, с. 5-14.
5. Агаева С.А. Исследование решения почти всюду одномерной смешанной задачи для полулинейных параболических уравнений четвертого порядка. II., Бакинский Государственный Университет, Баку 2006г., 36 стр. (рукопись де-

- понирована в АЗНИИТИ, Баку, 23.03.2006, №2787 – Аз.).
6. Агаева С.А. Исследование решения почти всюду одномерной смешанной задачи для полулинейных параболических уравнений четвертого порядка – Тезисы научной конференции, посвященной 70-летию члена корреспондента НАНА, д.ф.-м.н., профессора Б.А.Искендерова, Баку, 17 мая 2006г., с.17.
 7. Худавердиев К.И., Агаева С.А. Исследование решения почти всюду одномерной смешанной задачи для полулинейных параболических уравнений четвертого порядка. II. –Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2006г., №2, с. 5-15.

**DÖRDÜNCÜ TƏRTİB YARIM-XƏTTİ PARABOLİK TƏNLİKLƏR
ÜÇÜN BİRÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN KLASSİK HƏLLİNİN
TƏDQIQI. III.**

K.I.XUDAVERDIYEV, S.A.AĞAYEVA

XÜLASƏ

İş dördüncü tərtib yarım-xətti parabolik tənliklər üçün birölçülü qarışıq məsələnin klassik həllinin varlığı və yeganəliyi məsələlərinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. İşdə baxılan məsələnin klassik həllinə tərif verilir. Furiye metodunu tətbiq etdikdən sonra axtarılan $u(t, x)$ funksiyanın $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ sistemi üzrə naməlum $u_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) Furiye əmsallarının tapılması müəyyən hesabi qeyri-xətti integral tənliklər sisteminin həllinə gətirilir. İşdə öyrənilən qarışıq məsələnin klassik həllinin qlobal yeganəliyi, lokal və qlobal varlığı haqqında teoremlər isbat edilir.

**INVESTIGATION OF CLASSICAL SOLUTION OF A ONE-DIMENSIONAL
MIXED PROBLEM FOR A FOURTH ORDER SEMILINEAR PARABOLIC
EQUATIONS. III.**

K.I.KHUDAVERDIYEV, S.A.AGAYEVA

SUMMARY

This work is dedicated to the study of existence and uniqueness of classical solution of one-dimensional mixed problem for a semilinear fourth order parabolic equations. Conception of classical solution for the mixed problem under consideration is introduced. After applying Fourier method, the solution of original problem is reduced to the solution of some countable system of non-linear integral equations in unknown Fourier coefficients $u_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) of the sought solution $u(t, x)$ based on the system $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$. Besides, uniqueness theorem in large, existence theorem in small and existence theorem in large for the classical solution of the mixed problem under consideration are also proved in the this work.